

SEQUENCE 15 – Probabilités

1) Vocabulaire

Définition :

Une expérience aléatoire est une épreuve dont le résultat dépend du hasard.

Un évènement est un ensemble d'issues (ou de résultats). Un évènement est réalisé lorsque l'une des issues (ou résultats) qui le composent est réalisée.

Définition :

- Un évènement est dit impossible s'il ne peut pas se produire.
- Un évènement est dit certain s'il se produit nécessairement.
- Deux évènements sont dits incompatibles s'ils ne peuvent pas se réaliser en même temps.
- L'évènement contraire d'un évènement A est celui que se réalise lorsque A ne se réalise pas.

On le note "non A " ou \bar{A} .

Exemples :

On lance un dé non truqué à six faces numérotées de 1 à 6. C'est une expérience aléatoire car on ne peut pas prédire à l'avance quel chiffre sera sur la face supérieure.

Il y a six issues possibles à ce lancer : 1, 2, 3, 4, 5 ou 6.

L'évènement P : "obtenir un nombre pair" est constitué des issues 2, 4 et 6.

L'évènement \bar{P} : "obtenir un nombre impair" est l'évènement contraire de P et il est constitué des issues 1, 3 et 5.

L'évènement I : "obtenir 7" est un évènement impossible alors que

l'évènement S : "obtenir un nombre entier compris entre 1 et 6" est un évènement certain.

Les évènements M : "obtenir un multiple de 3" et N : "obtenir 5" sont des évènements incompatibles.

2) Notion de probabilité

a) Probabilité et fréquence

Définition :

Lorsqu'on répète un très grand nombre de fois une expérience aléatoire, la fréquence de réalisation d'un évènement se rapproche d'une valeur particulière que l'on appelle la probabilité.

Exemples :

On dispose d'une urne qui contient 4 boules vertes et 6 boules rouges.

On tire une boule au hasard et on s'intéresse à la couleur de la boule tirée.

Si on renouvelle un très grand nombre de fois cette expérience en remettant à chaque fois la boule tirée dans l'urne, la fréquence du résultat « la boule est verte » se stabilise autour de la valeur $\frac{4}{10}$ qui est la probabilité de l'évènement « Obtenir une boule verte ».

Calculer une probabilité

Propriété :

Quand les issues d'une expérience aléatoire ont toutes la même probabilité alors la probabilité d'un évènement est égale au quotient :

$$\frac{\text{nombre d'issues favorables}}{\text{nombre d'issues possibles}}$$

Exemple :

La probabilité d'obtenir "pile" lors du jet d'une pièce est égale à $\frac{1}{2} = 0,5$

Propriété :

- La probabilité d'un évènement est définie comme la somme des probabilités des issues qui le constituent.

- La probabilité d'un évènement certain est égale à 1 ;
- La probabilité d'un évènement impossible est égale à 0 ;
- Lorsque deux évènements sont incompatibles, la probabilité que l'un ou l'autre se réalise est égale à la somme de leurs probabilités.

Exemples :

Dans l'expérience du jeu de dé à 6 faces, on appelle :

A l'évènement : "obtenir 1" ;

D l'évènement "obtenir 4" ;

B l'évènement "obtenir 2" ;

E l'évènement : "obtenir 5" ;

C l'évènement "obtenir 3" ;

F l'évènement "obtenir 6".

Donc : $p(A) = p(B) = p(C) = p(D) = p(E) = p(F) = \frac{1}{6}$.

Soit l'évènement M "obtenir un multiple de 3".

L'évènement M est réalisé si la face obtenue est 3 ou 6. On a alors :

$$p(M) = p(C) + p(F) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Les évènements E et M sont incompatibles. Donc la probabilité d'obtenir 5 ou un multiple de 3 est égale à :

$$P(E \text{ ou } M) = p(E) + p(M) = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Propriété :

La somme des probabilités d'un évènement A et de son contraire est 1 :

$$p(A) + p(\text{non } A) = p(A) + p(\bar{A}) = 1$$

Un sac contient quatre jetons "M", trois jetons "A", deux jetons "T" et un jeton "H". On pioche un jeton au hasard.

La probabilité de l'évènement A : "piocher la lettre A" est de $\frac{3}{10}$.

Donc on peut calculer la probabilité de l'évènement \bar{A} : "ne pas piocher la lettre A" : $p(\bar{A}) = 1 - p(A) = 1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$